

Mécanique et mathématique dans l'œuvre de Joseph-Louis Lagrange

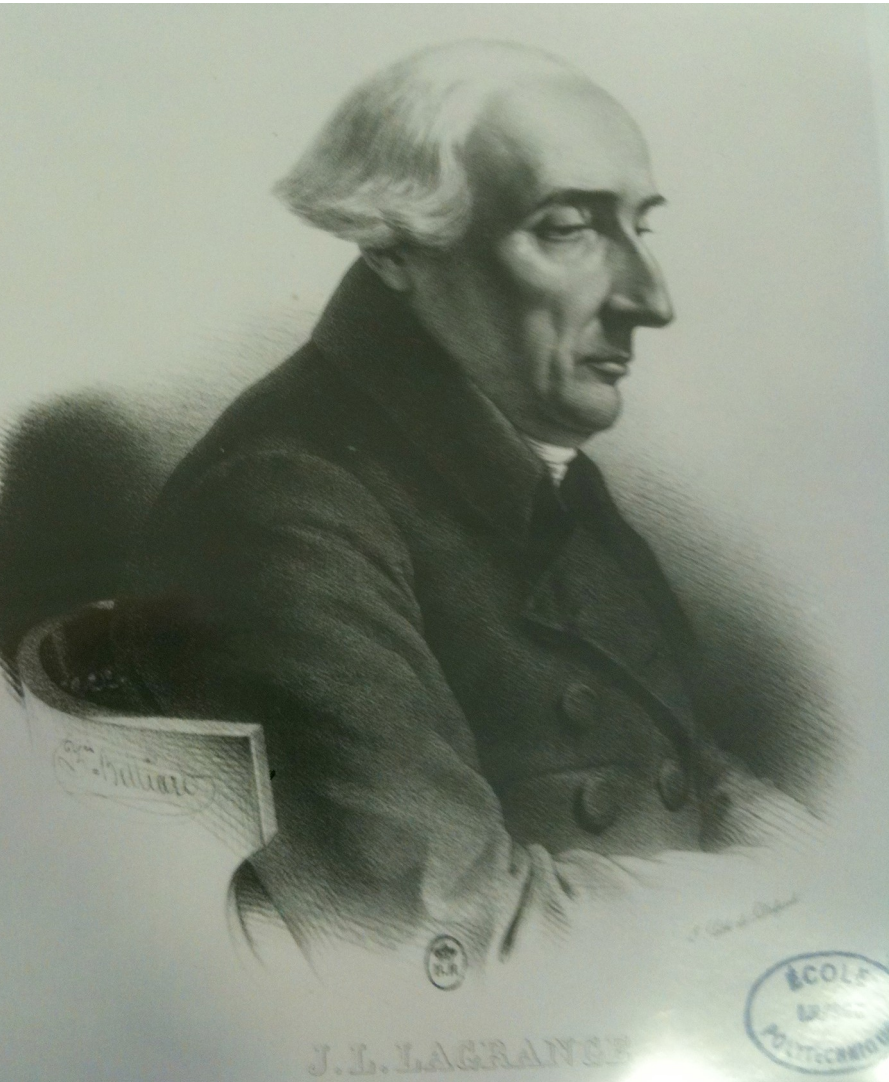
Guillaume Jouve

Laboratoire de Mathématiques de Lens, Univ. d'Artois

Lundi 14 octobre 2013

13ème Rencontre nationale des mécaniciens du CNRS

Introduction et Repères biographiques



- Né à Turin le 25 janvier 1736, décédé à Paris le 10 avril 1813.
- Carrière dans 3 capitales européennes :
 - Turin : 1736-1766
 - Berlin : 1766-1787
 - Paris : 1787-1813
- Contemporain d'Euler, de D'Alembert, de Clairaut, de Daniel Bernoulli, de Laplace, de Fourier...

Plan

I – Les débuts de Lagrange à Turin

II – Un savant européen : De Turin à Berlin, de Berlin à Paris

III – La *Mécanique Analytique*

I- Les premiers pas

A 18 ans, Lagrange découvre le **mémoire d'Euler** : « Une méthode pour trouver des lignes courbes jouissant de propriétés de maximum ou de minimum ».

Il envoie ses réflexions sur le sujet à Euler qui le félicite :

« Votre solution du problème des isopérimètres ne laisse rien à désirer, et je me réjouis que ce sujet, dont je m'étais presque seul occupé depuis les premières tentatives, ait été porté par vous au plus haut degré de perfection. »

Ces premiers travaux, publiés en 1762 dans les *Mélanges de Turin*, **jettent les fondements du calcul des variations et de la méthode des multiplicateurs dits « de Lagrange »**.

C'est aussi très jeune que Lagrange crée avec quelques amis, en 1758, les *Mélanges de Turin*, ouvrage périodique émanant d'une « société privée » qui sera reconnue comme « académie royale » en 1783.

La polémique des cordes vibrantes

- 1747 : D'Alembert, *Réflexions sur la Cause générale des Vents*.
- 1749 : D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin, année 1747*.
- 1750 : Euler, « Sur la vibration des cordes », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin, année 1750*.

Les deux savants aboutissent à l'équation $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$,
où t est le temps, x et y l'abscisse et l'ordonnée des points de la corde.

Dans le cas de la corde pincée, ils obtiennent la solution :

$$y(t, x) = \varphi(x+t) + \varphi(x-t).$$

Avec φ est impaire et $2a$ -périodique. **Mais ils sont en désaccord sur la nature des fonctions que l'on peut accepter dans cette solution.** D'Alembert est bien plus restrictif.

L'intervention de Lagrange

Lagrange intervient en 1759 dans la polémique par un mémoire :

« Recherches sur la nature et la propagation du son » publié dans les *Mélanges de Turin*.

Il procède à une « **discrétisation** ». Il considère un **corde sans masse chargée de n poids** et aboutit à un **système d'équations différentielles ordinaires** qu'il résout. Il fait ensuite tendre n vers l'infini. Cette méthode lui permet de faire **l'économie de l'utilisation des équations aux dérivées partielles** et des discussions sur la régularité de la fonction φ .

Lagrange souhaite mettre la solution d'Euler à l'abri des critiques.

Au début des années 1760, Euler s'est désintéressé de la question contrairement à D'Alembert. En 1761, D'Al. publie un mémoire où il explique que pour qu'une fonction φ puisse être acceptée, il faut nécessairement **qu'elle ne fasse pas « de sauts de courbure »**.

Il répond aussi à Lagrange en pointant plusieurs passages à la limite litigieux effectués par le savant turinois dans son mémoire de 1759. **C'est ainsi que débute la correspondance** entre les deux savants. Elle se **poursuivra à un rythme régulier jusqu'au décès de D'Alembert en 1783.**

En 1762, Lagrange revient sur les cordes vibrantes dans un long mémoire : « Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son ». Il renonce à son modèle « discret » pour traiter les questions de la propagation du son et de la vibration des cordes. **Les équations aux dérivées partielles occupent cette fois-ci une place centrale** dans ses travaux.

Au fil de la décennie 1750, les savants réalisent que les **EDP sont utiles** pour aborder un **grand éventail** de problèmes physico-mathématiques: propagation du son dans une colonne d'air mais aussi propagation d'ondes sphériques, mouvement des cordes vibrantes soumis à un coefficient de résistance, écoulement des fluides ...

Le séjour à Paris

Lagrange séjourne quelques mois à Paris fin 1763-début 1764. On retrouve ce témoignage de Clairaut dans une lettre à Daniel Bernoulli du 27 décembre 1763 :

« M. de la Grange [Lagrange] est ici maintenant, et j'ai été charmé de le voir et de causer avec lui. C'est un jeune homme très singulier tant par ses talents que par sa modestie. Son caractère est doux et mélancolique. Il ne connaît d'autre plaisir que l'être de [!] et semble plus s'y livrer par indolence que par ambition. Nous avons été sur le point de le perdre d'une fièvre putride, et il n'est point encore hors d'affaire. Ce serait en vérité dommage. »

II - De Turin à Berlin...

Avant 1766, Frédéric II de Prusse a déjà proposé à D'Alembert comme à Lagrange de venir s'installer à **Berlin**.

Mais Lagrange n'envisage pas une « cohabitation » avec Euler au sein de l'Académie. La situation change début 1766 car Euler décide de quitter Berlin pour St Petersburg.

Plusieurs raisons font que Lagrange accepte la proposition de Frédéric II : La faiblesse et la stagnation de son salaire, l'obligation d'enseigner dans un milieu assez hostile et peu motivé par la théorie, le mépris des autorités piémontaises pour la science et l'éloignement des centres intellectuels européens...

« on regarde la science dont je m'occupe comme très-inutile et même ridicule » (lettre du 10 mai 1766)

Il quitte Turin le 21 août 1766 et arrive à Berlin, après un passage à Paris et à Londres. Ainsi s'ouvre une période de **grande production scientifique**

De Berlin à Paris

En 1786, Lagrange **perd son protecteur Frédéric II**. Il décide d'accepter la proposition des autorités françaises et arrive à Paris en **mai 1787**.

Lagrange se rapproche au sein de l'Académie des Sciences de l'élite réformatrice et prend part aux changements entraînés par la Révolution. Il s'investit dans la **Commission des poids et mesures** de l'Académie chargée de mettre en place un **nouveau système métrique**. Lagrange est l'un des seuls savants à participer à presque toutes les commissions formées de 1790 et 1799. Il est notamment nommé en 1795 membre du Bureau des longitudes en compagnie de savants comme Laplace ou Cassini.

Il renoue avec l'enseignement, d'abord à l'**Ecole normale de l'an III** puis à partir de 1795 à l'**Ecole polytechnique** qui vient d'être fondée par Monge.

De ces enseignements est issue sa *Théorie des fonctions analytiques* parue en 1797. Lagrange cherche à débarrasser le **calcul différentiel de concepts comme les « infiniment petits »**. Il développe une approche algébrique basée sur l'expression analytique des fonctions mathématiques, et introduit à cette occasion la notion de dérivée d'une fonction

Lagrange et la Révolution

B. Belhoste décrit l'attitude de Lagrange :

« D'une certaine manière, on peut considérer qu'en se ralliant sans mot dire au nouveau pouvoir, il ne faisait que suivre la règle de conduite qu'il avait posée dès 1778, consistant, pour un homme sage, à « se conformer strictement aux lois du pays dans lequel on vit, quand même il y en aurait de déraisonnables ». Mais ce serait ignorer l'engagement sincère de Lagrange pour les idées de la Révolution. [...]. Même si la violence et l'agitation lui inspiraient du dégoût, il éprouvait une profonde sympathie pour les orientations de la Révolution et il n'hésita pas à s'engager personnellement, au point d'en voir sa vie et sa carrière scientifique bouleversées. »

Lettre du 5 nov. 1799. Lagrange à Monge

Citoyen collègue,

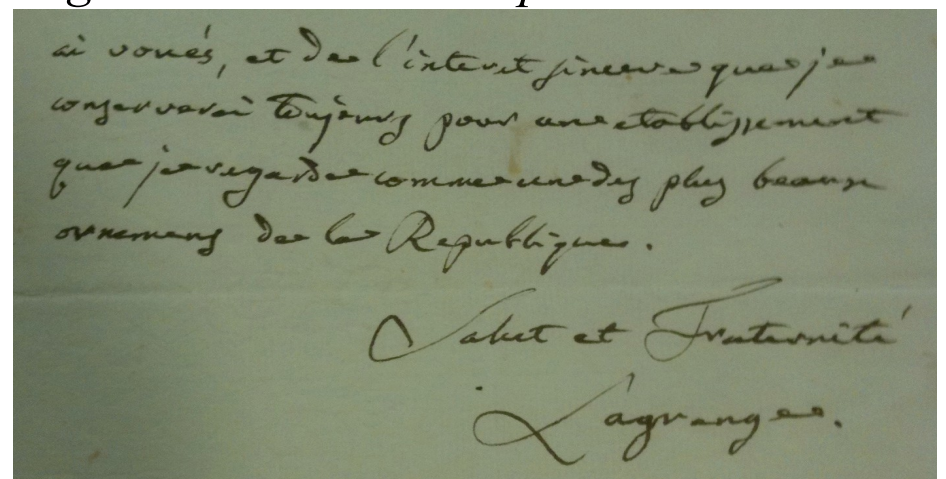
C'est avec regret que je me vois obligé de vous prévenir que la faiblesse de ma poitrine ne me permet plus de continuer mes leçons de l'Ecole polytechnique sans m'exposer à des accidents graves. Comme ces leçons n'avoient pour objet que l'avancement de l'analyse et n'étaient par conséquent destinées qu'à ceux qui désiraient la cultiver dans toute son étendue, elle n'entaient pas nécessairement dans les systèmes d'enseignement de l'Ecole ; et je pense qu'elles seraient remplacées plus utilement par des leçons ordinaires et suivies sur les parties des mathématiques dont l'étude est de rigueur et gait la matière des examens, surtout vu l'augmentation qui doit avoir lieu dans les nombres des élèves, et la limitation des professeurs des mathématiques à trois.

Permettez-moi en conséquence de vous prier d'engager le Conseil de prendre cet objet en considération [...].

Recevez les assurances des vifs sentiments que je vous ai voué, et de l'intérêt sincère que je conserverai toujours pour un établissement que je regarde comme un des plus beaux ornements de la République,

Salut et Fraternité,

Lagrange



*ai voués, et de l'intérêt sincère que je
conserverai toujours pour un établissement
que je regarde comme un des plus beaux
ornements de la République.*

*Salut et Fraternité
Lagrange.*

Sous l'Empire

Lagrange est séduit par le régime napoléonien.

Il est fait sénateur, comte d'Empire, Grand officier de la Légion d'honneur et Grand croix de l'Ordre impérial.

Encore productif scientifiquement, il **réagit aux travaux arithmétiques de Gauss** en publiant une nouvelle édition de son *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* (1808).

Mais Lagrange s'oppose aussi à certaines nouvelles approches, comme celle de Fourier...

III – La *Mécanique Analytique*

Théorie des nombres, mécanique des fluides, fonctions analytiques, mécanique céleste, probabilités : sa période berlinoise était une période de grande créativité pour Lagrange.

C'est à Berlin qu'il conçoit aussi sa *Mécanique Analytique*, publiée en 1788 à son arrivée à Paris.

On lit dans l'introduction :

« On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine. »

Structure de l'ouvrage

MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

*Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris,
de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.*



A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire,
rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

L'ouvrage est décomposé en deux parties : La statique et La dynamique.

L'ouvrage débute par un historique de la discipline, montrant que Lagrange est un lecteur assidu de ses contemporains et prédécesseurs.

Après avoir exposé des principes, il s'attache à les appliquer à la mécanique céleste, à la mécanique des fluides...

Les principes présentés d'emblée sont celui des « vitesses détruites » et celui dit des « travaux virtuels ».

Extrait de la table

- **Première partie. La statique**

Section première. Sur les différents principes de la statique

Section deuxième. Formule générale de la statique pour l'équilibre d'un système quelconque de forces, avec la manière de faire usage de cette formule

Section troisième. Propriétés générales de l'équilibre d'un système de corps, déduites de la formule précédente

Section quatrième. Manière plus simple et plus générale de faire usage de la formule de l'équilibre donnée dans la section deuxième

Section cinquième. Solution de différents problèmes de statique

Section sixième. Sur les principes de l'hydrostatique

Section septième. De l'équilibre des fluides incompressibles

Section huitième. De l'équilibre des fluides compressibles et élastiques

- **Seconde partie. La dynamique**

Section première. Sur les différents principes de la dynamique

Section deuxième. Formule générale de la dynamique pour le mouvement d'un système de corps animés par des forces quelconques

Section troisième. Propriétés générales du mouvement déduites de la formule précédente

« [Il] réalise [...] le projet, conçu et partiellement mis en œuvre par Euler, d'un unique traité de science rationnelle (analytique exposita) englobant toutes les branches de la mécanique : statique et hydrostatique, dynamique et hydrodynamique.

La lecture de Lagrange était universelle ; il avait, outre les œuvres de ses contemporains, étudié avec une remarquable objectivité les travaux de tous les précurseurs anciens et modernes connus de son temps, comme en font foi les notices historiques dont il enrichit son traité. De cette lecture, Lagrange élimine les balbutiements et les contradictions qui abondent chez les précurseurs. Adoptant les concepts et les postulats des grands créateurs du siècle précédent (Galilée, Huyghens, Newton) et dépassant Euler et d'Alembert, Lagrange se préoccupe avant tout d'organiser la mécanique, d'en fonder les principes, d'en perfectionner la langue mathématique, d'en dégager une méthode analytique générale de résolution des problèmes. Sa clarté d'esprit, son génie mathématique le servent à tel point qu'il parvient à une codification quasi parfaite de la mécanique dans le champ classique. »

René Dugas, *Histoire de la Mécanique*, 1950

Pour conclure

- Sur la fin de sa carrière, Lagrange n'est pas inactif. Il prépare notamment une **seconde édition de sa *Mécanique analytique*** en deux tomes considérablement enrichie. Seul premier tome paraît de son vivant en 1811.
- Ses travaux **influencent** la génération suivante de savants et bien au delà Hamilton, Poincaré...
- Sur le plan de la rigueur, sur celui de la rigueur, le style lagrangien se démarque de celui de ses prédécesseurs. A bien des égards, Lagrange est une **figure de transition** entre les mathématiques du XVIIIe et du XIXe siècle.